Calculus II

Tentamen 7 april 2011

Blad 1 vd 2

1 a Inductiebegin: Voor $n=1$, $a_n = a_1 = 0 < 5$

2

Inductiestap: Gegeven: $a_m < 5$ met $a_m = \sqrt{4+3a_{m-1}}$

Te bewijzen: $a_{m+1} < 5$

Bewijs: $a_{m+1} = \sqrt{4+3a_m}$

$< \sqrt{4+3\cdot 5}$ (zie gegeven)

$= \sqrt{19}$

$< \sqrt{25}$

$= 5$ QED

b Inductiebegin: $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{4+3\cdot 0} = 2 > 0 = a_1$, dus a_n is stijgend van a_1 naar a_2.

4

Inductiestap: Gegeven: $a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}$ en $a_m > a_{m-1}$

Te bewijzen: $a_{m+1} > a_m$

Bewijs: $a_{m+1} = \sqrt{4+3a_m}$

$> \sqrt{4+3a_{m-1}}$ (zie gegeven)

$= a_m$

Dus elke term is strikt groter dan de voorgaande, dus de rij is stijgend.

c als een rij strikt stijgend is en niet boven een waarde m uitkomt, is er (bij reële getallen)

3 ook een kleinste m waar de rij niet bovenuit komt. als de rij ~~echter~~ stijgend is, komt hij echter wel willekeurig dicht bij die kleinste m (anders zou er een kleinere m te kiezen zijn), dus is m de limiet van de rij, dus convergeert de rij.

d Er is een limiet (omdat bij c is vastgesteld dat er convergentie is) dus mag

5 worden gesteld: $\lim_{n\to\infty} a_n =: L$, dan $(a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}) \Rightarrow$

$L = \sqrt{4+3L}$

$\Rightarrow L^2 = 4 + 3L$

$\Rightarrow L^2 - 3L - 4 = 0$

$(L+1)(L-4) = 0 \Rightarrow L = -1$ of $L = 4$.

[illegible]

$\lim_{n\to\infty} a_n = 4$

a $\ln(e+x^2) = \frac{f(0)}{1}\cdot 1 + \frac{f'(0)}{1}\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \dots + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n$

$\Rightarrow 1\cdot 1 + \frac{1}{e+0^2}\cdot 2\cdot 0\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{(e+0^2)^2}\cdot 2\cdot 0 + 2\frac{1}{e+0^2}\right)x^2 + \dots + \frac{n!}{n!}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}-1}\, x^n \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}n}}$ voor even n

0 voor oneven n

$= 1 + 0 + \frac{x^2}{e} + 0 - \frac{x^4}{2e^2}$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{ne^n}$

6

b We 1 doet er voor de convergentie niet toe, dus vraag is: wanneer convergeert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{ne^n}$? alternating series test met $b_n = \frac{x^{2n}}{ne^n}$:

I: $b_{n+1} \le b_n$? $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{x^{2(n+1)}\cdot ne^n}{(n+1)e^{n+1}\cdot x^{2n}}\right| = \left|\frac{x\cdot x^{2n}\cdot ne^n}{x^{2n}\cdot e\cdot(n+1)e^n}\right|$

$= \left|\frac{x\cdot n}{e(n+1)}\right|$, wordt ≤ 1 als $|x|n < e\cdot(n+1)$

$|x| < \frac{e(n+1)}{n} = e$

$n\to\infty$, dus voor $|x| \le e$ geldt $b_{n+1} \le b_n$

II: $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?

Beschouw $|x| < e$ (bij alle $x > e$ wordt toch al niet aan I voldaa

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}}{ne^n}\right|$ gaat naar ∞ onde

...worteltest op $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{ne^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{ne^n}$ (de (-1) die er voor staat doet er voor convergentie ...

geeft $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{ne^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{ne}} = 0$ alleen als $x = 0$.

Dus alleen voor $x=0$ is er absolute convergentie.

d alle waarden die wel onder de voorwaarden bij (b) vallen en niet bij (c), dus $-1 \leq x \leq 1$ | $x \neq 0$, want bij b is bewezen dat er bij al die waarden conditionele convergentie is via een alternating series test.

3 a niet. Wandel via de lijn $y=x$ naar het punt $(0,0)$; dan wordt het functievoorschrift $f(y) = \frac{2 \cdot y \cdot y}{y^2+y^2}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{2y\,y}{y^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^2}{2y^2} = 1 \neq f(0,0) = 0$$

Dus de limiet naar $(0,0)$ van f is niet van alle kanten gelijk aan de waarde van f in $(0,0)$, dus f is niet continu.

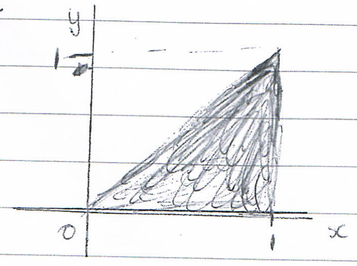
5/5

b $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin y \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot \sin y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin y$

$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0 = f(0,0)$

3/5

y gaat van 0 tot 1, x van y tot 1, dus dit gebied:



Dit gebied kan ook worden omschreven als
x gaat van 0 tot 1, y van 0 tot x

Dus:

$$\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\,dx$$

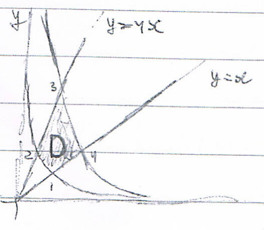
$$= \int_0^1 \left[x^2 e^{xy}\cdot\frac{1}{x}\right]_0^x dx = \int_0^1 \left[x e^{xy}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(x e^{(x^2)} - x e^0\right) dx = \int_0^1 \left(x e^{x^2} - x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{(x^2)} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e - 1$$

5a Jacobiaan: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{v}\cdot u - v\cdot\frac{-u}{v^2}\right) = \frac{u}{v} + \frac{u}{v} = \frac{2u}{v}$

5/5

b



De 4 ~~grenzen~~ hoekpunten:

1: $\left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, $y = x = 1$ $\quad (1, 1)$

2: $\left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ y = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $y = 4x = 2$ $\quad (\frac{1}{2}, 2)$

3: $\left.\begin{array}{l} xy = 9 \\ y = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $y = 4x = \frac{12}{2} = 6$ $\quad (\frac{3}{2}, 6)$

4: $\left.\begin{array}{l} xy = 9 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, $y = x = 3$ $\quad (3, 3)$

(2 vd 2

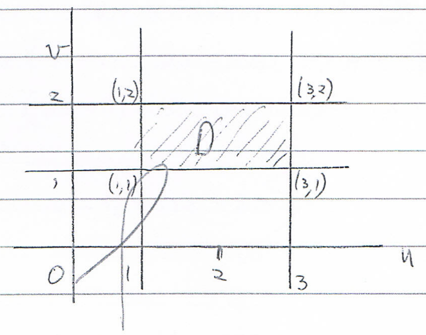
ervolg: De nieuwe krommen: $xy = 1 \Rightarrow \frac{u}{v} \cdot uv = 1 \Rightarrow u^2 = 1 \Rightarrow u = 1$

$xy = 9 \Rightarrow \frac{u}{v} \cdot uv = 9 \Rightarrow u^2 = 9 \Rightarrow u = 3$

$y = x \Rightarrow \frac{u}{v} = uv \Rightarrow v^2 = 1 \Rightarrow v = 1$

$y = 4x \Rightarrow 4\frac{u}{v} = uv \Rightarrow v^2 = 4 \Rightarrow v = 2$

De nieuwe hoekpunten zijn hun snijpunten:



Dus de nieuwe integraal wordt $\iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\,dy = \iint \left(\sqrt{\frac{uv}{\frac{u}{v}}} + \sqrt{\frac{u}{v} \cdot uv}\right) \cdot \left|\frac{2u}{v}\right| du\,dv$

$= \iint_D (v + u) \cdot \frac{2u}{v}\, du\,dv = \int_1^2\int_1^3 2u + \frac{2u^2}{v}\, du\,dv = \int_1^2 \left[u^2 + \frac{2}{3}\frac{u^3}{v}\right]_1^3 dv = \int_1^2 \left(\left(9 + \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{v}\right) - \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{v}\right)\right) dv$

Ik hoef me geen zorgen te maken over moeilijke grenzen en de integratievolgorde, omdat de grenzen allemaal afhankelijk zijn van maar 1 variabele.

$= \int_1^2 \left(8 + \frac{2}{3} \cdot \frac{26}{v}\right) dv = \left[8v + \frac{52}{3} \ln v\right]_1^2 = \left(16 + \frac{52}{3} \ln 2\right) - \left(8 + \frac{52}{3} \ln 1\right) = 8 + \frac{52}{3} \ln 2$

10/10

De homogene vergel: $y''(x) + 4y(x) = 0$ 15/15

$\Rightarrow r^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow r = \pm 2i$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

Gok voor een particuliere oplossing: $A \cos x + B \sin x$

dan $y_p'' = -A \cos x - B \sin x$

dus $y_p'' + 4y_p = \sin x$ geeft

$\Leftrightarrow -A \cos x - B \sin x + 4(A \cos x + B \sin x) = \sin x$

sin en cos scheiden: $(-A + 4A) \cos x = 0 \cos x \Rightarrow A = 0$

$(-B + 4B) \sin x = 1 \sin x \Rightarrow -B + 4B = 1 \Rightarrow 3B = 1 \Rightarrow B =$

dus $y_p = \frac{1}{3} \sin x$

De totale oplossing: $y = y_h + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$

b $y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + \frac{1}{3} \sin 0 = c_1 \cdot 1 + 0 + 0$ dus $y(0) = 0$ als $c_1 = 0$

$y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi + \frac{1}{3} \sin \pi = c_1 \cdot 1 + 0 + 0$, dus $y(\pi) = 0$ als $c_1 = \pi$, wat in tegenstrijd is met $y(0) = 0$. Er is dus geen oplossing bij deze randvoorwaarden.

c Homogeen is gelijk aan die bij a: $y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Gok voor particuliere oplossing: $xA \cos 2x + xB \sin 2x$

~~dan $y_p' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$~~

~~$y_p'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$~~

~~Invullen:~~

~~$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4(A \cos 2x + B \sin 2x) = \sin 2x$~~

~~Uitsplitsen:~~

~~$(-4A + 4A) \cos 2x = 0$~~

~~$(-4B + 4B) \sin 2x = \sin 2x$~~

dan $y_p' = A \cos 2x - 2xA \sin 2x + B \sin 2x + 2xB \cos 2x$

$y_p'' = -2A \sin 2x - 2A \sin 2x - 4xA \cos 2x + 2B \cos 2x + 2B \cos 2x - 4xB \sin 2x$

~~Invullen geeft~~

invullen geeft

$-\cancel{A\sin 2x} - 4A\sin 2x - 4xA\cos 2x + 4B\cos 2x - 4xB\sin 2x + 4xA\cos 2x + 4xB\sin 2x = \sin 2x$

$\Rightarrow \quad -4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \sin 2x$

$\Rightarrow B = 0, \quad A = -\frac{1}{4}$

dus $y_p = \cancel{\sin} - \frac{1}{4}x \cos 2x$

in totaal $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$

d $\quad y_h$ is nog steeds $y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

Ik gok $y_p = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}x\cos 2x$

Checken: $\quad y_p' = \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x$

$y_p'' = -\frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x$

~~invullen: $-\frac{1}{3}\sin x - \cos 2x + x\sin 2x + \frac{4}{3}\sin x - x\sin 2x = \sin x$~~

invullen: $-\frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x + \frac{4}{3}\sin x - x\cos 2x$

$= \sin x + \sin 2x + x\cos 2x - x\cos 2x$

$= \sin x + \sin 2x \qquad$ klopt.

Dus $\quad y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}x\cos 2x$

~~d Klopt. $\sum a_n$ convergeert $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ gaat naar ∞, dus dan moet de som van die oneindige termen $\sum \frac{1}{a_n}$ zeker naar oneindig gaan.~~

3 b nee, Klopt niet. Neem $a_n = n$ en $b_n = -n$. ~~Dan $\sum a_n$, $\sum b_n$ divergeren~~

Dan a_n, b_n divergeren $\Rightarrow \sum a_n$, $\sum b_n$ divergeren (divergence theorem).

Echter: $\sum (a_n + b_n) = \sum (n + -n) = \sum 0$, en die divergeert duidelijk niet (is altijd 0).

c Klopt. ~~Neem~~ uit de gegevens volgt dat a_n van bovenaf (anders zou a_m negatief

4 zijn) naar 0 convergeert (anders $\sum a_n$ niet convergent).

uit de definitie van limiet volgt dat vanaf de N'de term, $a_n < 1$ (definitie met $\varepsilon = 1$)

Vanaf die term: $a_n^3 \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n^3 < \sum_{n=N}^{\infty} a_n$, deze laatste convergeert dus $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^3$ convergeert ook.

$\sum_{n=1}^{N-1} a_n^3$ heeft een eindige waarde, dus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{N-1} a_n^3 + \sum_{n=N}^{\infty} a_n^3$ convergeert ook.

a Klopt niet. Neem $a_n = \frac{-1}{n^2}$, dan $\sum a_n = \sum \frac{-1}{n^2}$ convergent, maar

$\sum \frac{1}{a_n} = \sum -n^2$ divergeert naar $-\infty$.

3